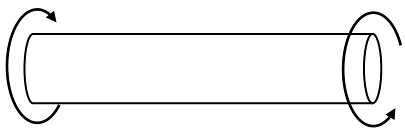
Problème1

1. Schéma et critère

Critère de von Mises (torsion pure)



$$\sigma_g = \sqrt{3}\tau_{max}$$

Coefficient de sécurité

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_g}$$

2. Contrainte de cisaillement en torsion pure

Couple de torsion

$$P = \omega M_t = 2\pi \frac{1500}{60} M_t = 50\pi M_t$$

Moment d'inertie polaire

$$I_p = \frac{\pi D^4}{34}$$

Contrainte de cisaillement

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{D/2\ M_t}{I_p} = \frac{16\ P}{\omega\ \pi\ D^3}$$

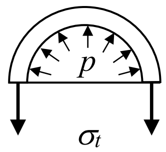
3. Calcul du diamètre de l'arbre

$$D = \sqrt[3]{\frac{16\ P}{\omega\ \pi\ \tau_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{16\ P}{\omega\ \pi \sigma_g/\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{16\ \sqrt{3}\ n\ P}{\omega\ \pi\ \sigma_{et}}} = 0.54\ m$$

Problème 2

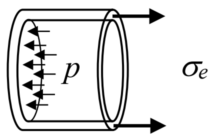
1. Schéma et contrainte interne

Contrainte tangentielle



$$\sigma_t = \frac{p\,R}{e}$$

Contrainte axiale



$$\sigma_e = \frac{p\,\pi\,R^2}{2\,\pi\,R\,e} = \frac{p\,R}{2\;e}$$

Contrainte radiale $\sigma_r << \sigma_e$ et σ_t

2. Critère de Mohr-Coulomb : Le coefficient de sécurité est donné par la formule

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \alpha\sigma_3} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}}$$

1. Contrainte principale avec pression intérieur

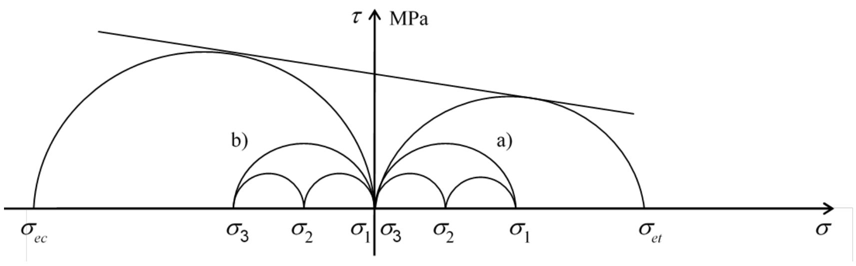
$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pR}{e}$$
$$\sigma_2 = \sigma_e = \frac{pR}{2e}$$
$$\sigma_3 = 0$$

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1} \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_{et}}{n} = 66.6\ MPa$$
$$e = \frac{pR}{\sigma_1} = 1{,}5 \text{ cm}$$

2. Contrainte principale avec pression extérieure ($\sigma_1 = 0$)

$$\sigma_1 = 0$$
$$\sigma_2 = \sigma_e = -\frac{pR}{2e}$$
$$\sigma_3 = -\frac{pR}{e}$$

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\alpha\,\sigma_3} \quad \rightarrow \quad -\sigma_3 = \frac{\sigma_{et}}{\alpha\,n} = 100\ MPa$$
$$e = -\frac{pR}{\sigma_3} = 1 \text{ cm}$$



3. Critère de von Mises (ou plus grand travail de distorsion) : Le coefficient de sécurité est donné par les relations

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_g}$$

Il n'y a ici pas de distinction entre les cas a) et b).

$$\sigma_1 = 0$$
$$\sigma_2 = \sigma_e = -\frac{pR}{2e}$$
$$\sigma_3 = -\frac{pR}{e}$$

$$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{pR}{e} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_1$$

$$\sigma_g = \frac{\sigma_{et}}{n} = 66{,}6 \text{ MPa}$$

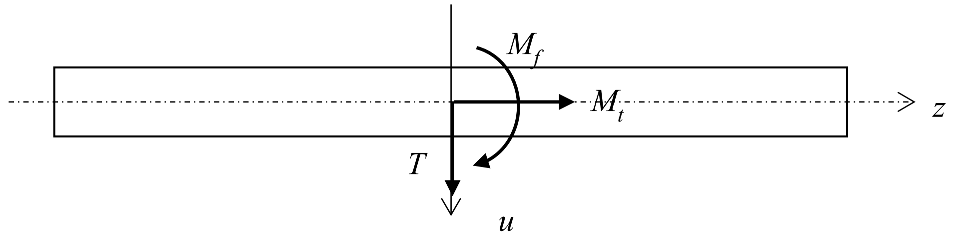
Et par conséquent

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_g = 76.9\ MPa$$

$$e = \frac{pR}{\sigma_1} = 1{,}3 \text{ cm}$$

Problème 3

1. Schéma



2. Contraintes associées en un point M_0 de l'axe *u* de la section, dues aux efforts intérieurs et orientations

Effet de la flexion M_f :

$$\sigma_x = \frac{M_f}{I} u$$

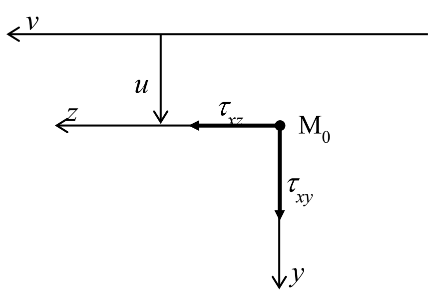
Effet de la torsion M_t :

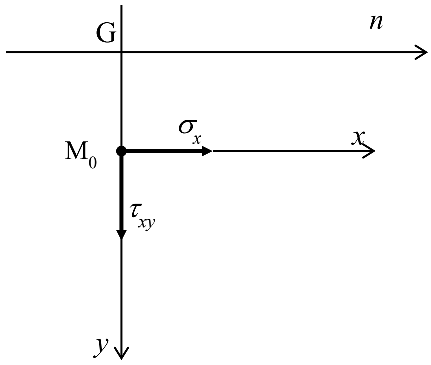
$$\tau_{xz} = -\frac{M_t}{I_p} u$$

Effet de l'effort ranchant T :

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3}\frac{T}{F}\left[1 - \left(\frac{u}{D/2}\right)^2\right]$$ (voir problème 6.2, fin du corrigé)

Sens positifs conventionnels des contraintes





3. Matrices des contraintes et contraintes principales

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contraintes principales

$$det(\Gamma - \sigma_k I) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & -\sigma_k & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & -\sigma_k \end{vmatrix} = 0$$

Soit

$$(\sigma_x - \sigma_k)\sigma_k^2 + \tau_{xz}^2\sigma_k + \tau_{xy}^2\sigma_k = 0$$

En posant $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau^2$ et $\sigma_x = \sigma$ on obtient l'équation : $\sigma_k\left(\sigma_k^2 - \sigma\sigma_k - \tau^2\right) = 0$ dont les racines sont:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$$

4. Critère de Tresca (critère du plus grand cisaillement)

$$n = \frac{\tau_e}{\tau_{13}}$$

Avec

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$n = \frac{2\tau_e}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$$

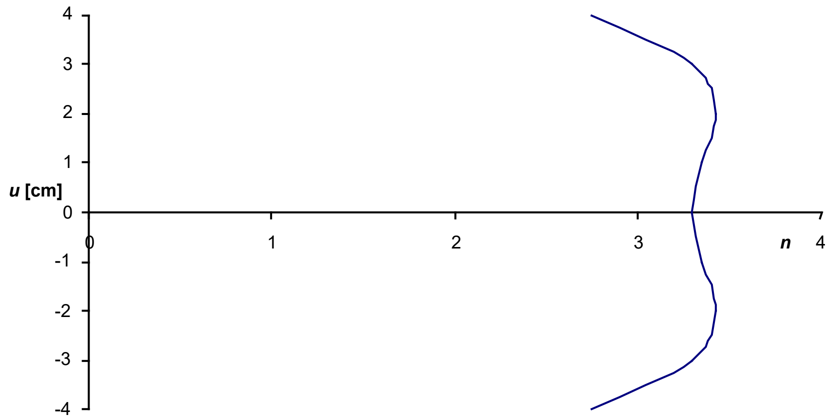
5. Application numérique :

$$D = 8\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I = \dfrac{\pi D^4}{64} = 200\,\text{cm}^4 \\ I_p = 2I = 400\,\text{cm}^4 \\ F = \dfrac{\pi D^2}{4} = 50\,\text{cm}^2 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \sigma_x = 2500u\ [\text{MPa}] \\ \tau_{xz} = -1000u\ [\text{MPa}] \\ \tau_{xy} = 53\left(1 - \left(\dfrac{u^2}{16\cdot 10^{-4}}\right)\right)[\text{MPa}] \end{cases}$$

Et le coefficient de réduction vaut :

$$n(u) = \frac{350}{\sqrt{(2500)^2u^2 + 4\left[(1000)^2u^2 + (53)^2\left(1 - \dfrac{u^2}{16\cdot 10^{-4}}\right)^2\right]}}$$

Cette fonction est paire et présente l'allure ci-dessus

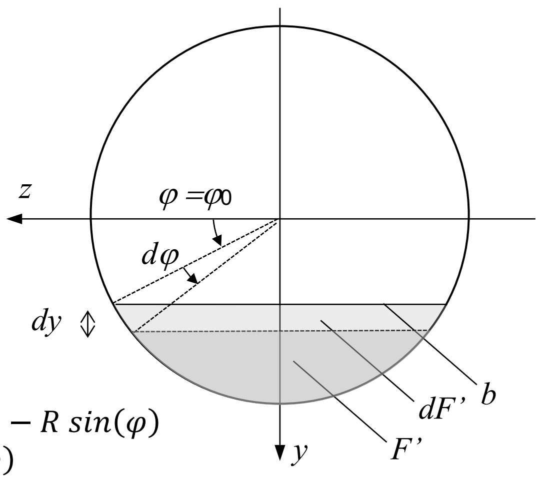


u [m]	n
0	3,3
0,01	3,35
0,02	3,43
0,03	3,3
0,04	2,75

La valeur minimum de n apparaît aux fibres extrêmes de la section, ce qui met en évidence le rôle prépondérant de la contrainte normale de flexion σ_x et de la contrainte tangentielle de torsion τ_{xz} par rapport à la contrainte τ_{xy} due à l'effort tranchant. Cette contrainte, maximum au centre, y provoque cependant un minimum local du coefficient de réduction.
Dans cette étude, il resterait encore à démontrer que l'état de contrainte le plus sévère règne bien sur l'axe u
($v = 0$).

Calcul du moment statique de la section partielle circulaire

$$y = R\,sin(\varphi)$$
$$z = R\,cos(\varphi)$$



L'aire de la portion dF

$$dF' \;=\; 2z\,\cdot dy$$

Avec

$$\begin{aligned} dy &= R\,sin(\varphi + d\varphi) - R\,sin(\varphi) \\ &= R\,[sin(\varphi)cos(d\varphi) + sin(\varphi)cos(d\varphi)] - R\,sin(\varphi) \\ &= R\,[sin(\varphi)\cdot 1 + cos(\varphi)d\varphi] - R\,sin(\varphi) \\ &= Rcos(\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

Le moment statique est donné par

$$S' = \iint_{F'} y\,dF' = 2R^3\int_{\varphi_0}^{\pi/2} sin(\varphi)cos^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{3}R^3cos^3(\varphi_0)$$

Et la donc la contrainte de cisaillement

$$\tau_{xy} = \frac{TS'}{Ib} = \frac{4}{3}\frac{T}{\pi R^2}cos^2(\varphi_0) = \frac{4}{3}\frac{T}{F}\left[1 - \left(\frac{y=u}{R}\right)^2\right]$$

Comme : $u^2 = y^2 = R^2sin^2(\varphi_0) = R^2\big(1 - cos^2(\varphi_0)\big)$ → $cos^2(\varphi_0) = 1 - \left(\frac{u}{R}\right)^2$